Japanese version shall be the authorized version; the English translation for reference only.

京都大学大学院情報学研究科
通信情報システム専攻　修士課程入学者選抜試験問題
(平成29年度10月期入学・平成30年度4月期入学)
Admissions for October 2017 and for April 2018
Entrance Examination for Master's Program
Department of Communications and Computer Engineering
Graduate School of Informatics, Kyoto University
平成29年8月7日　9:00 – 12:00
August 7, 2017　9:00 a.m. - 12:00 noon

専門基礎A
Problem Set A

注意 (NOTES)

1. 解答開始の合図があるまで中を見てはいけない。
2. これは「専門基礎A」の問題用紙で、表紙共に 19 枚 ある。解答開始の合図があった後、枚数を確かめ、落丁または不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
3. 問題は9問(A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, A-9)ある。4問を選択して解答すること。答案用紙の問題番号欄に問題番号を記入すること。
4. 解答は問題ごとに答案用紙1枚を使うこと。答案用紙1枚に2問以上の解答もしくは1問の解答を2枚以上の答案用紙に書いた場合は無効にすることがある。なお、必要な場合「裏に続く」と明記した上で裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙は4枚綴じたまま使用し、切り離さないこと。
6. 答案用紙の綴じ込みがはずれた場合は、直ちに申し出ること。
7. 解答は日本語または英語で行うこと。

1. Do not open the pages before a call for starting.
2. This is the **"Problem Set A"** in 19 pages including this front cover.
   After the call of starting, check all pages are in order and notify proctors (professors) immediately if missing pages or with unclear printings are found.
3. **Answer 4 of the following 9 questions;** A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, and A-9. State the Question Numbers you choose on the Answer Sheet.
4. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used, stating "Over" at the end of the page. Note that in case two or more questions are answered in one sheet or two or more sheets are used for one question, they may be regarded as no answers.
5. Do not separate the pages of answer sheets; keep them bound.
6. Notify proctors (professors) immediately if the pages are separated for some reason.
7. Answer the questions either in Japanese or English.

専門基礎 A

$\boxed{\text{A-1}}$, $\boxed{\text{A-2}}$, $\boxed{\text{A-3}}$, $\boxed{\text{A-4}}$, $\boxed{\text{A-5}}$, $\boxed{\text{A-6}}$, $\boxed{\text{A-7}}$, $\boxed{\text{A-8}}$, $\boxed{\text{A-9}}$ の9問から4問を選択して解答せよ。

Problem Set A

Choose and answer **4 questions** out of $\boxed{\text{A-1}}$, $\boxed{\text{A-2}}$, $\boxed{\text{A-3}}$, $\boxed{\text{A-4}}$, $\boxed{\text{A-5}}$, $\boxed{\text{A-6}}$, $\boxed{\text{A-7}}$, $\boxed{\text{A-8}}$, and $\boxed{\text{A-9}}$.

A-1

下記のすべての問に答えよ．(English translation is given on the next page.)

(1) 下記の問に答えよ．

(a) 次の積分の結果を求めよ．

$$f(s)=\int_0^1 \mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x,\ s\geq 0$$

(b) 問 (a) の $f(s)$ について，次の極限を求めよ．

$$\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}f(s)}{\mathrm{d}s}$$

(c) n を正整数とする．問 (a) の $f(s)$ について，次の極限を求めよ．

$$\lim_{s\to 0}\frac{\mathrm{d}^n f(s)}{\mathrm{d}s^n}$$

(2) 下記の問に答えよ．関数 $\Gamma(x)$ は次式で定義される．

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\ x>0$$

(a) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

(b) 整数 m に対し，関数 $J_m(x)$ を次式で定義する．

$$J_m(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}$$

次の等式が成り立つことを示せ．

$$J_{m-1}(x)-J_{m+1}(x)=2\frac{\mathrm{d}J_m(x)}{\mathrm{d}x}$$

(3) 下記の問に答えよ．

(a) 次の行列式を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 2a^2 & a & 3 & a & 2 \\ a & 1 & 2 & 2 & 3a \\ 3a & 2a & a & 2a & 5 \\ a & a & 3 & a & 2 \\ 4 & a & 1 & a & a \end{vmatrix}$$

(b) 行列 $\boldsymbol{A}$ は次式で与えられる．ただし，$x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$ である．

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

行列式 $\det(\boldsymbol{A})$, $\det(\boldsymbol{A}^{-1})$, $\det(\boldsymbol{A}^2)$ をそれぞれ求めよ．

continued on next page
次　頁　へ　続　く

Answer all the following questions.

(1) Answer the following questions.

(a) Evaluate the following integral.

$$f(s) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x, \ s \geq 0$$

(b) Find the following limit. Function $f(s)$ is defined in Question (a).

$$\lim_{s \to 0} \frac{\mathrm{d}f(s)}{\mathrm{d}s}$$

(c) Let n be a positive integer. Find the following limit. Function $f(s)$ is defined in Question (a).

$$\lim_{s \to 0} \frac{\mathrm{d}^n f(s)}{\mathrm{d}s^n}$$

(2) Answer the following questions. Function $\Gamma(x)$ is defined as

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \ x > 0.$$

(a) Show that

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

(b) Let m be an integer. Function $J_m(x)$ is defined as

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}.$$

Show that

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2\frac{\mathrm{d}J_m(x)}{\mathrm{d}x}.$$

(3) Answer the following questions.

(a) Find the following determinant.

$$\begin{vmatrix} 2a^2 & a & 3 & a & 2 \\ a & 1 & 2 & 2 & 3a \\ 3a & 2a & a & 2a & 5 \\ a & a & 3 & a & 2 \\ 4 & a & 1 & a & a \end{vmatrix}$$

(b) Matrix $\boldsymbol{A}$ is given as

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix},$$

where $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, and $z = r\cos\theta$. Find determinants $\det(\boldsymbol{A})$, $\det(\boldsymbol{A}^{-1})$, and $\det(\boldsymbol{A}^2)$.

A-2

以下の設問 (1), (2), (3) から 2 つを選んで答えよ.
Answer two of the following questions (1), (2), and (3).

(1) フーリエ変換に関する下記の問に答えよ. ただし, 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ は次式で定義される.
Answer the questions below related to a Fourier transform. Note that the Fourier transform of a function $f(t)$ is defined in the following.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \qquad (\mathrm{i} = \sqrt{-1})$$

また, その逆変換は次式で与えられる.
The inverse Fourier transform is given in the following.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

(a) 次の関数 $f(t)$ のフーリエ変換を求めよ.
Find the Fourier transform of $f(t)$ defined in the following.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (|t| > a > 0) \\ 1 & (|t| < a) \end{cases}$$

(b) 問 (a) の結果を用いて, 次の積分 I を求めよ.
Evaluate the following integral I taking the result of Question (a) into account.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega \cos \omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega$$

(2) 下記の連立微分方程式の一般解を求めよ.
Find the general solution of the following simultaneous differential equations.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 5\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 8y = t\mathrm{e}^t \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x - y = \mathrm{e}^t \end{cases}$$

(3) 下記の問に答えよ.
Answer the following questions.

(a) 次の積分 I について, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(\mathrm{i} = \sqrt{-1})$ と置いて, z に関する複素積分で表せ.
By using $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(\mathrm{i} = \sqrt{-1})$, express the following integral I in the complex integral with respect to z.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a + b\cos\theta}\mathrm{d}\theta \qquad (a > b \geq 0)$$

(b) 問 (a) の結果を用いて, 積分 I を求めよ.
Evaluate the integral I taking the result of Question (a) into account.

A-3

下記の全ての問に答えよ.

Answer all the following questions.

(1) 図(a)のように, 半無限領域 $x \leq 0$ に接地された完全導体があり, その表面から距離 d だけ離れた点 A に電荷$+q$ の点電荷が置かれている. ここで, $x > 0$ は真空である.

Consider a perfect grounded conductor in a semi-infinite region $x \leq 0$ and a point charge $+q$ held at a point A which is distant from the surface of the perfect conductor by a distance d as shown in Figure (a). Here, the region $x > 0$ is a vacuum.

(a) 点電荷の電気影像を図示せよ.

Illustrate the image charge in a diagram.

(b) 真空中の任意の点 P における電位を求めよ. なお, 用いた座標系を明示すること.

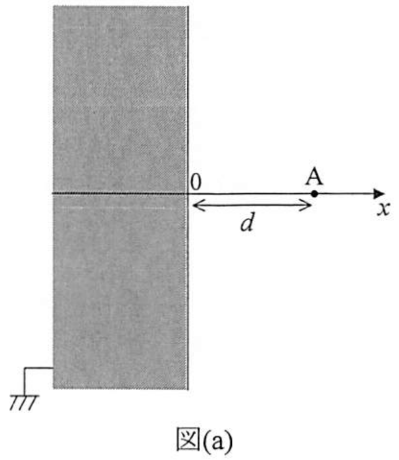
Find the potential at an arbitrary point P in vacuum. Show the used coordinate system.

(c) 導体表面上の誘導電荷密度を求めよ. また, 誘導電荷の総量が $-q$ となることを示せ.

Find the induced surface-charge density of the perfect conductor. Show that the total amount of the induced surface-charges is equal to $-q$.

(d) 導体表面上の誘導電荷にはたらく合力を求めよ.

Find the total force acting on the induced surface-charges.



図(a)

Figure (a)

(2) 電磁気学に関する次の用語を説明せよ.

Explain the meanings of the following terms related to the electromagnetism.

(a) ビオ・サバールの法則

Biot-Savart law

(b) ストークスの定理

Stokes' theorem

(c) 誘電分極

Dielectric polarization

A-4

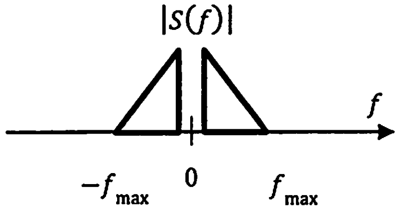
下記のすべての問に答えよ．(English translation is given on the next page.)

(1) 次式に示す振幅変調信号$g_{\mathrm{AM}}(t)$に関する以下の問に答えよ．

$$g_{\mathrm{AM}}(t) = A_{\mathrm{c}}[1 + ms(t)]\cos(2\pi f_{\mathrm{c}}t)$$

ただしA_{c}，m，および f_{c} は定数であり， ベースバンド信号$s(t)$の最大周波数を$f_{\max}$とすると， $0 < f_{\max} \ll f_{\mathrm{c}}$であり，$|ms(t)| \le 1$である．

(a) $g_{\mathrm{AM}}(t)$および$s(t)$のフーリエ変換をそれぞれ$G_{\mathrm{AM}}(f)$および$S(f)$とする．$G_{\mathrm{AM}}(f)$を導出し，周波数スペクトルを図示せよ．ただし，周波数スペクトル$|S(f)|$を図(a)に示す．



図(a)

(b) $g_{\mathrm{AM}}(t)$の復調において次式で与えられる雑音$n(t)$が付加された信号$y(t)$が入力される．

$$y(t) = g_{\mathrm{AM}}(t) + n(t)$$

ただし，$n(t) = n_{\mathrm{I}}(t)\cos(2\pi f_{\mathrm{c}}t) - n_{\mathrm{Q}}(t)\sin(2\pi f_{\mathrm{c}}t)$であり，$n_{\mathrm{I}}(t)$と$n_{\mathrm{Q}}(t)$は最大周波数が$f_{\max}$である独立な雑音である．

理想的な同期検波が行われた場合の復調器出力信号$v(t)$を導出せよ．

(c) 問(b)の$y(t)$を理想的な包絡線検波で復調する場合，復調器出力信号$r(t)$を導出し，信号対雑音電力比が十分大きい場合には，$r(t)$と問(b)における$v(t)$の信号対雑音電力比が等しくなることを示せ．

(2) 次に示す変調信号$y(t)$に関する以下の問に答えよ．

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i[k]p(t-kT)\cos 2\pi f_{\mathrm{c}}t - \sum_{k=-\infty}^{\infty} q[k]p(t-kT)\sin 2\pi f_{\mathrm{c}}t$$

ここでf_{c}は搬送波周波数，$p(t)$は送信パルス波形，Tはシンボル間隔，$i[k] \in \{-1, 1\}$, $q[k] \in \{-1, 1\}$はそれぞれＩチャネルおよびＱチャネルの情報系列とする．

(a) 信号$y(t)$の変調方式の名称を答え，この変調方式の特徴を２つ示せ．

(b) $p(t)$としてロールオフファクタαのコサインロールオフナイキストパルスを用いる．この$p(t)$の周波数伝達関数を示せ．

(c) $h(t)$を受信フィルタのインパルス応答とする．整合フィルタ受信を行う場合の$h(t)$と$p(t)$の関係を理由とともに示せ．

continued on next page
次　頁　へ　続　く

Answer all the following questions.

(1) Answer the following questions related to the amplitude modulation (AM) scheme. An AM signal $g_{\mathrm{AM}}(t)$ is expressed in the following equation.

$g_{\mathrm{AM}}(t) = A_{\mathrm{c}}[1 + ms(t)]\cos(2\pi f_{\mathrm{c}} t)$,

where A_{c}, m, and f_{c} are constant values, $s(t)$ is a baseband signal, and $|ms(t)| \leq 1$. The maximum frequency of $s(t)$ is $f_{\max}$, and $0 < f_{\max} \ll f_{\mathrm{c}}$.

(a) Fourier transforms of $g_{\mathrm{AM}}(t)$ and $s(t)$ are denoted by $G_{\mathrm{AM}}(f)$ and $S(f)$, respectively.
Find $G_{\mathrm{AM}}(f)$ and draw the frequency spectrum. The frequency spectrum $|S(f)|$ is shown in Figure (a).

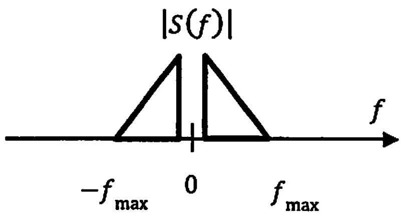


Figure (a)

(b) The input signal $y(t)$ of the demodulator for $g_{\mathrm{AM}}(t)$ is expressed in the following equation.
$y(t) = g_{\mathrm{AM}}(t) + n(t)$, where $n(t) = n_{\mathrm{I}}(t)\cos(2\pi f_{\mathrm{c}} t) - n_{\mathrm{Q}}(t)\sin(2\pi f_{\mathrm{c}} t)$.
The noise signals of $n_{\mathrm{I}}(t)$ and $n_{\mathrm{Q}}(t)$ are independent and band-limited within $f_{\max}$. Find the output signal $v(t)$ of the demodulator when the ideal coherent detection is performed.

(c) Find the output signal $r(t)$ of the demodulator when the ideal envelope detection of $y(t)$ in Question (b) is performed.
Show that the signal to noise power ratio of $r(t)$ equals to that of $v(t)$ in Question (b) when the signal to noise power ratio is sufficiently high.

continued on next page
次 頁 へ 続 く

(2) Answer the following questions related to the modulated signal $y(t)$ shown below;

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i[k]p(t-kT)\cos 2\pi f_c t - \sum_{k=-\infty}^{\infty} q[k]p(t-kT)\sin 2\pi f_c t,$$

where f_c is the frequency of the carrier, $p(t)$ is the transmit pulse shape, T is the symbol duration, and $i[k] \in \{-1, 1\}$ and $q[k] \in \{-1, 1\}$ are the information sequences of I channel and Q channel, respectively.

(a) Answer the name of the modulation scheme used for $y(t)$ and explain two characteristics of the scheme.

(b) Assume $p(t)$ is the cosine roll-off Nyquist pulse with the roll-off factor α. Show the frequency response of $p(t)$.

(c) Assume $h(t)$ is the impulse response of the receive filter. Show the relation between $h(t)$ and $p(t)$ with reason when matched filter reception is employed in the receiver.

A-5

下記のすべての問に答えよ.
(English translation is given on the next page.)

(1) 図(a)に示す2つの電源回路が等価であるとき，EとJの関係を求めよ. ここで，電源の内部インピーダンスと内部アドミタンスを、それぞれZとYとする.

(2) 図(b)に示す回路のV_0を求めよ. ここで，Y_i $(i=1,2,3,\ldots,n)$ は各電圧源の内部アドミタンスである.

(3) 図(c)に示すように，縦続行列$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$で定義される 2 端子対回路網(4 端子回路網)の出力端に負荷インピーダンスZ_Lを接続する. 入力端から見たインピーダンスを求めよ.

(4) 図(d)に示す理想的な演算増幅器を用いた回路について，以下の問に答えよ.
  (a) V_aを求めよ.
  (b) V_2/V_1を求めよ.
  (c) この回路がどんな種類のフィルタか説明せよ.

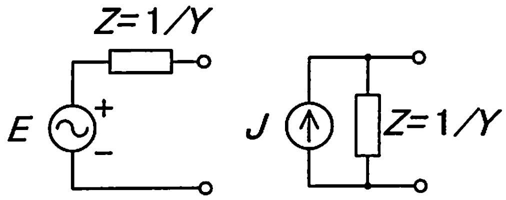


図 (a)

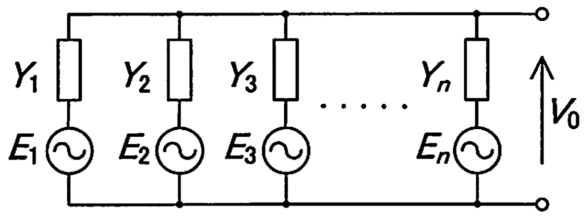


図 (b)

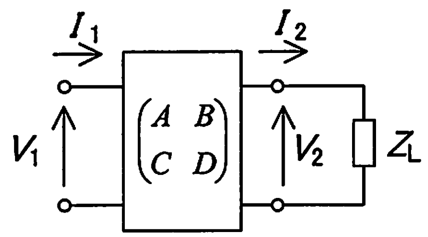


図 (c)

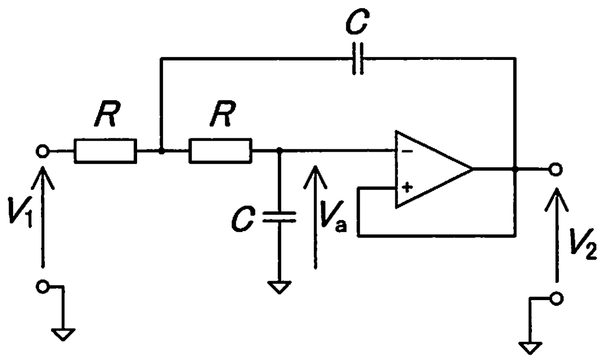


図 (d)

continued on next page
次 頁 へ 続 く

Answer all the following questions.

(1) Two power-supply circuits shown in Figure (a) are equivalent. Find the relationship between E and J. Note that internal impedance and internal admittance of the source are denoted by Z and Y, respectively.

(2) For the circuit shown in Figure (b), find V_0. Note that Y_i ($i = 1,2,3,\ldots,n$) is internal admittance of each voltage source.

(3) As shown in Figure (c), a load impedance Z_L is connected to the output port of a two-port network (four-terminal network) that is defined by the cascade matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Find the impedance measured from the input port.

(4) For the circuit with an ideal operational amplifier shown in Figure (d), answer the following questions.

(a) Find V_a.

(b) Find V_2/V_1.

(c) Explain what kind of filter this circuit is.

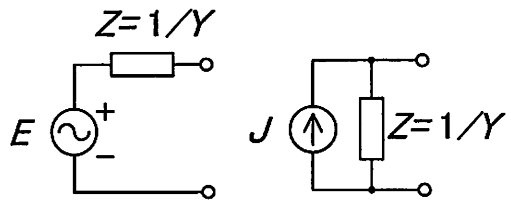


Figure (a)

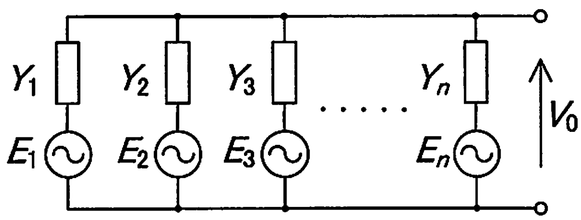


Figure (b)

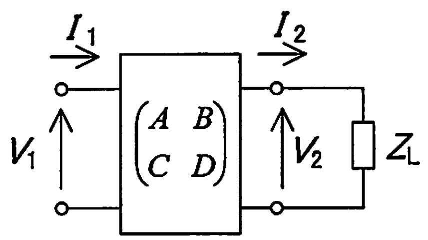


Figure (c)

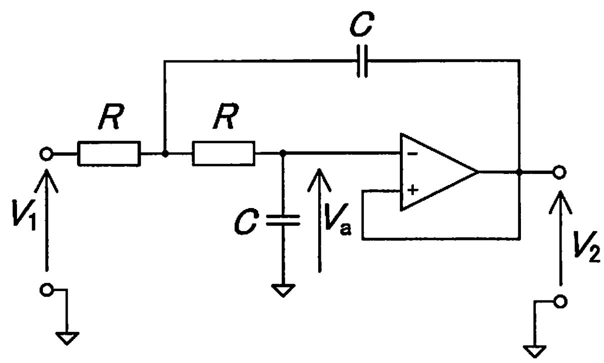


Figure (d)

A-6

下記のすべての問に答えよ．(English translation is given on the next page.)

(1) S_A と S_B は記憶のない定常情報源であり，S_A は情報源記号 0，1 をそれぞれ 3/4，1/4 の確率で，S_B は 0，1 をそれぞれ 5/8，3/8 の確率で発生させる．以下の問に答えよ．$\log_2 3 = 1.6$，$\log_2 5 = 2.3$ を用いてよい．

(a) コンパクト符号の定義を述べよ．

(b) S_A の 2 次の拡大情報源に対する 2 元ハフマン符号化を示せ．また，そのときの情報源記号 1 つあたりの平均符号長を算出せよ．

(c) S_A のエントロピーを算出せよ．

(d) 情報源 S_X は 2 つの状態をもち，状態 s_A では S_A として，状態 s_B では S_B として情報源記号を発生させる．S_X が情報源記号 1 を発生させると，その状態が遷移する．S_X の状態遷移図を描け．

(e) 問 (d) の S_X の定常分布を求めよ．

(f) 問 (d) の S_X が情報源記号 1 を発生させる確率を求めよ．

(2) 符号長 n，誤り訂正能力 t の 2 元符号の符号語数を M とすると次式（ハミングの限界式と呼ばれる）が成立することを証明せよ．また，ハミング符号の場合には等号が成立することを証明せよ．ただし，${}_n\mathrm{C}_i = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ である．

$$M \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t} {}_n\mathrm{C}_i}$$

continued on next page
次　頁　へ　続　く

Answer all the following questions.

(1) $\mathrm{S_A}$ and $\mathrm{S_B}$ are stationary memoryless information sources. $\mathrm{S_A}$ generates information symbols 0 and 1 with probabilities 3/4 and 1/4, respectively, while $\mathrm{S_B}$ generates 0 and 1 with probabilities 5/8 and 3/8, respectively. Answer the following questions. $\log_2 3 = 1.6$ and $\log_2 5 = 2.3$ may be used.

- (a) Describe the definition of compact code.
- (b) Find a binary Huffman code for the second extension of $\mathrm{S_A}$ and the expected codeword length per symbol.
- (c) Find the value of the entropy of $\mathrm{S_A}$.
- (d) An information source $\mathrm{S_X}$ has two states and generates information symbols as $\mathrm{S_A}$ and $\mathrm{S_B}$ when its state is $\mathrm{s_A}$ and $\mathrm{s_B}$, respectively. $\mathrm{S_X}$ transits from a state to the other state when it generates information symbol 1. Draw the state diagram of $\mathrm{S_X}$.
- (e) Find the stationary distribution of $\mathrm{S_X}$ in Question (d).
- (f) Find the probability that $\mathrm{S_X}$ in Question (d) generates information symbol 1.

(2) Prove that the following relation (it is called Hamming bound) holds true where M is the total number of codewords of a binary code with code length n and error correcting capability t. Then, prove that equality holds true in the case of Hamming code, where ${}_n\mathrm{C}_i = \frac{n!}{(n-i)!i!}$.

$$M \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t} {}_n\mathrm{C}_i}$$

A-7

以下の全ての問に答えよ．
Answer all the following questions.

以下は，配列 a の 要素 $a[l], a[l+1], \ldots, a[h]$ を昇順に並べ変えるクイックソート手続き qsort(a, l, h) の擬似コードである．swap(a, i, j) は配列 a の i, j 番目の要素を交換する手続きである．

The following pseudocode shows a procedure of quicksort qsort(a, l, h) to sort elements $a[l], a[l+1], \ldots, a[h]$ of the given array a in the increasing order, where swap(a, i, j) is a procedure to swap the i-th and j-th elements of array a.

```
qsort(a, l, h) :
if l < h
  then
      b := l; p := a[l];
      for i := l + 1 to h step 1 do
          if (p > a[i]) then b := b + 1; swap(a, [ 1 ], [ 2 ]); fi od
      swap(a, l, b);
      qsort(a, l, b − 1);
      qsort(a, b + 1, h); fi
```

(1) $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ にあてはまる式を与え，手続き qsort を完成させよ．

Give expressions for $\boxed{1}$ and $\boxed{2}$ to complete the procedure qsort.

(2) qsort 中の for ループの各繰り返しの先頭時点での配列 a の要素，変数 l, h, p, b, i の関係を図示して説明せよ．

Illustrate and explain the relationship between elements in array a, variables l, h, p, b, and i at the beginning of each iteration of the for-loop in qsort.

(3) 長さ 7 の配列 a に対し qsort$(a, 0, 6)$ を実行した時に，要素間の比較回数が最大になるように a の初期要素 $a[0], \ldots, a[6]$ を与えよ．一般に，長さ n の配列 a に対し qsort$(a, 0, n-1)$ を実行した時，要素間の最大比較回数は何回になるか答えよ．

Suppose the length of a is 7. Give initial values $a[0], \ldots, a[6]$ so that qsort$(a, 0, 6)$ performs the largest number of comparisons among array elements. When qsort$(a, 0, n-1)$ is run on an array a of length n, how many comparisons of array elements are performed in the worst case, in general?

(4) 代入文 $b := l;$ の前にswap$(a, \mathrm{rand}(l, h), l)$; を挿入するとしよう．(ただし rand$(x, y)$ はx 以上 y 以下のランダムな整数を表す．) この修正にはどのようなメリットがあるか答えよ．

Suppose we insert swap$(a, \mathrm{rand}(l, h), l)$; before the assignment $b := l;$. Here, rand(x, y) represents a random integer i such that $x \leq i \leq y$. What are merits of this modification?

(5) マージソートが，どのようなアルゴリズムかを説明し，様々な観点からクイックソートと比較せよ．

Explain mergesort and compare it with quicksort from various viewpoints.

A-8

下記のすべての問に答えよ.

(1) 2進表現について，以下の問に答えよ.
(a) 次の数を8ビットの2の補数表現で表せ.
(i) +28 (ii) −40
(b) 次の8ビットの2の補数表現の2進数を8ビット符号付き絶対値表現に変換せよ.
(i) 11000000 (ii) 10111111
(c) 次の8ビットの2の補数表現の2進数体系での加算および減算の結果を示せ.
(i) 11000000+11000000 (ii) 11000000+10111111
(iii) 11000000−10111111 (iv) 10111111−11000000
(d) 8ビットの2の補数表現の2進数体系で10111111を2ビット算術右シフトした結果を示せ.

(2) 次の6ビットの2の補数表現の2進数に対する乗算において全ての部分積を明示することにより2次のブースのアルゴリズムを説明せよ。
被乗数: 011101、乗数: 010110

(3) コンピュータ（命令セットアーキテクチャ）における以下のデータアドレシングモードについて説明せよ.
(a) 即値 (b) レジスタ (c) ベース相対（ベース＋オフセット）

Answer all the following questions.

(1) Answer the following questions on the binary number system.
(a) Express the following numbers in the 8-bit two's complement representation.
(i) +28 (ii) −40
(b) Convert the following 8-bit two's complement binary numbers into the 8-bit sign-and-magnitude representation.
(i) 11000000 (ii) 10111111
(c) Show the results of the following additions and subtractions in the 8-bit two's complement binary number system.
(i) 11000000+11000000 (ii) 11000000+10111111
(iii) 11000000−10111111 (iv) 10111111−11000000
(d) Show the result of the 2-bit arithmetic right shift operation on 10111111 in the 8-bit two's complement binary number system.

(2) Explain radix-4 modified Booth's algorithm by showing all the partial products of the multiplication for the following pair of 6-bit two's complement binary numbers.
Multiplicand: 011101, Multiplier: 010110

(3) Explain the following data addressing modes in a computer (instruction set architecture).
(a) immediate (b) register (c) base-relative (base + offset)

A-9

以下の問に答えよ．算術オーバーフローは起こらないものと仮定せよ．(English translation is given on separate pages.)

以下の BNF で文法が定義されるプログラミング言語 $\mathcal{L}$ を考える．

$$
\begin{array}{rcl}
i & ::= & \textbf{skip} \mid \textbf{push}(n) \mid \textbf{pop} \mid \textbf{op} \mid \textbf{dup} \mid \textbf{whilenz}\ [is] \mid \textbf{whilegt1}\ [is] \\
is & ::= & i_1 \ldots i_n \\
\textbf{op} & ::= & \mathit{plus} \mid \mathit{minus} \mid \mathit{le}
\end{array}
$$

i は命令を表すメタ変数，is は命令列を表すメタ変数，**op** は二項演算を表すメタ変数，n は整数定数を表すメタ変数である．

$\mathcal{L}$ のプログラムは与えられた命令列に従って整数のスタック S を操作する．スタック S 内のトップの要素から数えて i 番目 $(i = 0, 1, \ldots)$ の要素を，$S(i)$ と書く．以下ではスタック S を $[S(0), S(1), \ldots, S(n-1)]$ のように表記することがある．例えば，トップから $0, 1, 2$ が並んでいるスタックを $[0, 1, 2]$ と表記する．このスタックを一回ポップすると，スタックは $[1, 2]$ に変化する．$S(i)$ という表記は以下の説明のために用いるものであり，プログラム中でこの表記を用いることはできないことに注意せよ．

各命令はスタックを以下のように操作する．

- **skip**: スタックに変化を加えない．
- **push**(n): 整数 n をスタックにプッシュする．n は $\ldots, -1, 0, 1, \ldots$ のような整数定数でなければならない．
- **pop**: スタックのトップの要素をスタックからポップする．
- **op**: $S(0)$ と $S(1)$ に演算 **op** で表される計算を行い (この結果を a と書く)，$S(0)$ と $S(1)$ をスタックから取り除き，a をスタックにプッシュする．具体的には，以下の演算が用意されている．
  - 命令が *plus* である場合，計算結果 a は $S(1) + S(0)$ となる．例えば S が $[3, 2, 1]$ である状態で *plus* を実行すると実行後のスタックは $[5, 1]$ となる．
  - 命令が *minus* である場合，計算結果 a は $S(1) - S(0)$ となる．例えば S が $[9, 7, 5]$ である状態で *minus* を実行すると，実行後のスタックは $[-2, 5]$ となる．
  - 命令が *le* である場合，計算結果 a は，$S(1) \le S(0)$ であれば 1，$S(1) > S(0)$ であれば 0 となる．例えば S が $[5, 2, 1]$ である状態で *le* を実行すると実行後のスタックは $[1, 1]$ となり，S が $[2, 5, 1]$ である状態で *le* を実行すると実行後のスタックは $[0, 1]$ となる．
- **dup**: スタックのトップの要素を複製する．すなわち，現在の $S(0)$ をスタックにプッシュする．例えば，スタックが $[0, 1, 2]$ であったとき，命令 **dup** を実行すると実行後のスタックが $[0, 0, 1, 2]$ となる．
- **whilenz** [is]: スタックのトップの要素が 0 であれば何もせず，0 でなければ is を実行した後に，再び **whilenz** [is] を実行する．
- **whilegt1** [is]: スタックの要素数が 1 以下であれば何もせず，1 より大であれば is を実行した後に，再び **whilegt1** [is] を実行する．

(1) 空のスタックから始めて以下の $\mathcal{L}$ のプログラムを実行したときのスタックの変化を順を追って説明せよ．

push(5) **dup** *minus* **pop**

(2) 正の整数 n のみを要素として含む長さ 1 のスタック $[n]$ から以下の命令列の実行を始めて，実行が停止

continued on next page
次　頁　へ　続　く

するならば，そのときのスタックの状態はどのようになっているか．

whilenz [**dup** **push**(1) *minus*]
whilegt1 [*plus*]

(3) 初期状態におけるスタックが [1] であればスタックのトップが 0 である状態で停止し，[n]（ただし $n \neq 1$）であれば停止しない $\mathcal{L}$ のプログラムを一つ書け．書いたプログラムがなぜその通りに動作するかを説明すること．

(4) 言語 $\mathcal{L}$ のインタプリタの実装を示せ．解答に先立ち，インタプリタを実装するための言語を以下から選択し明示すること: C, C++, Java, Scheme, Racket, OCaml, Haskell. 解答にあたっては以下の点に留意すること．

- インタプリタの実装をすべて書く必要はなく，**pop** 命令，*plus* 命令，**whilenz** 命令，**whilegt1** 命令の実装が分かるように解答すればよい．
- 命令とスタックをどのようなデータ構造で表現したかを説明すること．
- 上記の言語仕様に未定義動作があれば，どの部分が未定義で，解答においてその未定義動作をどのように扱ったかを明示的に説明すること．

continued on next page
次頁へ続く

Answer all the following questions. Assume that overflows do not happen during execution of a program.

$\mathcal{L}$ is a programming language whose syntax is defined by the following BNF:

$$\begin{array}{rcl} i & ::= & \textbf{skip} \mid \textbf{push}(n) \mid \textbf{pop} \mid \textbf{op} \mid \textbf{dup} \mid \textbf{whilenz}\ [is] \mid \textbf{whilegt1}\ [is] \\ is & ::= & i_1 \ldots i_n \\ \textbf{op} & ::= & plus \mid minus \mid le \end{array}$$

i is the metavariable for *instructions*; is is the metavariable for *instruction sequences*; **op** is the metavariable for a *binary operators*; and n is the metavariable for integer constants.

An $\mathcal{L}$ program manipulates an integer stack S following a given instruction sequence. We write $S(i)$ ($i = 0, 1, \ldots$) for the i-th element in S counted from the top. We often write $[S(0), S(1), \ldots, S(n-1)]$ for the stack S. For example, we write $[0, 1, 2]$ for the stack that contains elements $0, 1, 2$ in this order from the top. If we pop this stack once, the stack changes to $[1, 2]$. Note that the notation $S(i)$ is introduced for explaining the language $\mathcal{L}$ below; it is not for use in an $\mathcal{L}$ program.

Each instruction manipulates the stack as follows:

- **skip** does not change the stack.
- **push**(n) pushes the integer n to the stack. n must be an integer constant like $\ldots, -1, 0, 1, \ldots$.
- **pop** pops the top element of the stack.
- **op** applies the operator **op** to $S(0)$ and $S(1)$; we write a for the result of the operation below. The instruction removes $S(0)$ and $S(1)$ from the stack and pushes a to the stack. **op** is one of the following operators:
  - The operator *plus* sets the result a to $S(1) + S(0)$. For example, if *plus* is executed with stack $[3, 2, 1]$, then the stack after this instruction is $[5, 1]$.
  - The operator *minus* sets the result a to $S(1) - S(0)$. For example, if *minus* is executed with stack $[9, 7, 5]$, then the stack after this instruction is $[-2, 5]$.
  - The operator *le* sets the result a to 1 if $S(1) \leq S(0)$; to 0 if $S(1) > S(0)$. For example, if *le* is executed with stack $[5, 2, 1]$, then the stack after this instruction is $[1, 1]$. If it is executed with stack $[2, 5, 1]$, then the stack after this instruction is $[0, 1]$.
- **dup** duplicates the top element of the stack. Concretely, it pushes the current $S(0)$ to the stack. For example, if the stack is $[0, 1, 2]$, then **dup** changes the stack to $[0, 0, 1, 2]$.
- **whilenz** [is] does nothing if the top of the stack is 0. If the top element is not 0, the instruction executes is and then executes **whilenz** [is] again.
- **whilegt1** [is] does nothing if the number of the elements in the stack is less than or equal to 1. If it is greater than 1, this instruction executes is and then executes **whilegt1** [is] again.

Parentheses may be used in writing a program if they are necessary.

(1) Explain how the stack sequentially changes if the following $\mathcal{L}$ program is executed with the initial stack being empty.

$$\textbf{push}(5)\ \textbf{dup}\ minus\ \textbf{pop}$$

(2) We execute the following instruction sequence with the initial stack being $[n]$ that contains only

continued on next page
次 頁 へ 続 く

one positive integer n. If the execution terminates, what is the resulting stack in the final state?

whilenz [**dup push**(1) *minus*]
whilegt1 [*plus*]

(3) Write an $\mathcal{L}$ program that satisfies the following specification: The program terminates with the stack whose top is 0 if it is executed with the initial stack being [1]; the program does not terminate if it is executed with the initial stack being [n] where $n \neq 1$. Explain why your program satisfies the specification.

(4) Describe the implementation of an interpreter for $\mathcal{L}$. First declare a programming language that you use to implement the interpreter from the following choices: C, C++, Java, Scheme, Racket, OCaml, and Haskell. Your answer should satisfy the following conditions:

- You do not need to write down the whole implementation of your interpreter; it suffices to show the implementation of the following instructions: **pop**, *plus*, **whilenz**, and **whilegt1**.
- You should explain the data structure for instructions and stacks that you use in your implementation.
- If the specification of $\mathcal{L}$ above contains undefined behaviors, you should explicitly explain them and how you defined these undefined behaviors.